Unendliche Reihen

Wenn man bei einer Folge die einzelnen Glieder aufsummiert, dann entsteht eine Summe (logisch). Da das Thema "unendliche Reihen" heißt, können wir also nicht sagen, was für ein Wert rauskommt, wenn wir alle Glieder dieser Folge aufaddieren - denn die Folge ist ja unendlich. Deswegen können wir uns lediglich ein Glied heraussuchen und die Summe bis zu diesem Glied berechnen.

Da bis zu dem ausgesuchten Glied nur eine Teilsumme ~~de~~ der Folge berechnet wird, heißt sie auch so:

Die n-te Partialsumme s_n.

$$\boxed{s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$$

auch schreibbar als

$$\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad a_k \in \mathbb{R}}$$

Nun interessiert sich der Mathematiker, der manchmal auch ein wenig philosophisch ist, auch für die Frage, was passieren würde, wenn man tatsächlich zwischen <u>alle</u> Glieder einer unendlichen Reihe "+" schreiben würde.

Bei $\boxed{s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ mit $a_n = 1$ hätten wir eine unendlich große Summe. Sie hat keinen Endwert, ist also "divergent".

Sobald wir uns aber einem Wert s nähern, den wir nicht überschreiten, ist die Folge konvergent.
Mathematisch ausgedrückt:

$\boxed{\lim_{n\to\infty} s_n = s}$ und $\boxed{s = s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$

Is klar, dass a_n nicht, wie vorher gezeigt, 1 sein kann...
Man sagt in diesem Fall:
"Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hat einen endlichen Wert s".
Das werden wir später anhand der Folge $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ sehen, diese konvergiert nämlich gegen **2**.

Beispiele:
~~Wi~~
Wir hatten ja schon geklärt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ divergent ist, denn sie hat keinen Grenzwert, sondern geht immer mehr in Richtung Unendlich.

Nehmen wir jetzt ein zweites Beispiel:

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$

Je größer n, desto kleiner der Wert, der dazu addiert wird und deswegen würde man ja eigentlich sagen:
Da muss es einen Grenzwert s geben, also ist diese Reihe konvergent.
Aber dem ist nicht so und deswegen - hier der Beweis:

Schauen wir uns doch einfach mal die n-te und die 2n-te Partialsumme an (wer sollte uns das verbieten☺) - wozu wir das machen, werden wir gleich sehen).

$$\boxed{s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$$

$$\boxed{s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{2n}}$$

Wenn die unendliche Reihe nun wirklich konvergent wäre, dann hätte sie ja ~~wirklich~~ einen Grenzwert s, wie wir bereits festgestellt haben.

Nochmal Mathematisch ausgedrückt:

$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$

Das gilt natürlich auch für s_{2n}, also $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s.$

Die Grenzwertrechenregeln (auf Seite 64 im Skript) besagen, dass ~~die Folgen~~ zwei Folgen, die die Grenzwerte a und b haben, folgenden gemeinsamen Grenzwert haben:

$$\boxed{(a_n - b_n) \to (a-b)}$$

Unser a und b ~~s~~ sind ja jeweils der gleiche Grenzwert s, also folgt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_n) = s - s = 0.}$$

Dass das für unsere vorliegende Folge aber gar nicht sein kann, wird jetzt gezeigt:

Was bleibt denn, wenn wir $s_{2n} - s_n$ rechnen?

Da bleibt übrig:

$$\boxed{s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}}$$

Je größer der Nenner, desto kleiner die Zahl selbst. Also ist in dieser Folge $\frac{1}{2n}$ der kleinste Wert.

Es ist also klar, dass $s_{2n} - s_n$ größer ist, also wenn ich eben diese n-mal $\frac{1}{2n}$ addiert hätte. Mathematisch:

$$\boxed{s_{2n} - s_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}}$$

Und das ist ja schon der Beweis, dass diese Folge <u>nicht</u> konvergent sein kann, denn wir haben vorhin festgestellt, dass dann $s_{2n} - s_n = s - s = 0$ sein müsste, hier heißt es jetzt aber, dass $s_{2n} - s_n$ größer als $\frac{1}{2}$ ist.
Das ist der Beweis, dass diese Folge divergent ist.

Jetzt aber mal wieder zurück zum normalen Leben:

<u>Wichtige endliche und unendliche Reihen</u>

Wenn man eine endliche Reihe aufaddieren soll, zumindest, wenn
dann gilt ja: $\boxed{s_n = \frac{n}{2}(n+1)}$,
diese Reihe bei 1 beginnt. Sollte sie irgendwo anders beginnen, dann nimmt man eben genau diesen anderen Wert.
Dieses Beispiel hatten wir bereits in einer der "Vorlesungen" behandelt, nämlich im Kontext des Summenzeichens, das war das Beispiel mit Friedrich Gauss, der alle
Zahlen von 1 bis 100 aufaddieren sollte.

In allgemeiner Form schreiben wir also:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$, wobei a_1 und a_n das erste bzw. letzte Glied der Reihe darstellen.

Stellen wir uns nun vor, wir haben eine unendliche arithmetische Reihe:

$$\boxed{s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

Ist diese nun konvergent oder divergent?

Die Formel

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

war ja für die Partialsumme einer endlichen Reihe. Die gesamte Reihe kann natürlich nur konvergent sein, wenn die Partialsummenfolgen ebenfalls konvergieren.

Also prüfen wir, ob sie dies tun.

a_1 ist ja das erste Element der Reihe, a_n das letzte.

Wenn ich $\boxed{a_6}$ wissen möchte, dann addiere ich auf a_1 einfach $\boxed{5}$ mal den konstanten Wert d auf (d ist die konstante Differenz zwischen den Gliedern).

Also ist a_n allgemein:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Das wende ich jetzt auf die Formel an:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = \cancel{\frac{n}{2}a_1}$$

$$= \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + n \cdot d - 1 \cdot d) = \frac{n}{2}(2a_1 + nd - d)$$

$$\boxed{= n \cdot a_1 + \frac{n^2}{2}d - \frac{n}{2}d}$$

a_1 und d sind ja konstant, ändern sich mit größer werdendem n also nicht.

Was kommt nun raus, wenn ich für jedes n ± unendlich einsetze?

$$\lim_{n \to \pm\infty} s_n = \lim_{n \to \pm\infty} n \cdot a_1 + \frac{n^2}{d} - \frac{n}{2} \cdot d = \underline{\underline{\pm\infty}}$$

Da wir keinen Grenzwert haben ist die arithmetische (unendliche) Reihe also divergent.

Wenn die Summanden aus der Reihe

$$\boxed{s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$$

aus einer geometrischen Folge stammen, ~~(Beispiel:~~

dann spricht man von einer endlichen geometrischen Reihe.

Jetzt machen wir wieder ein paar Rechenschritte, bei denen erst hinterher klar wird, wozu wir das Ganze eigentlich machen.

Wir halten erstmal fest, dass s_n die Aufsummierung aller Glieder von a_1 bis a_n ist, also:

$$\boxed{s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Was hat das q plötzlich da zu suchen?

Naja, gerade das macht die Summanden ja zu Summanden aus einer geometrischen Folge).

Auch wenn die Aufgabe aus der Probeklausur (Testklausur) nicht endlich war, auch dort ging es um die Aufsummierung von Summanden aus einer geometrischen Folge.

$$\boxed{\text{Erinnerung: } \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i}$$

Zurück zum Thema:

Wie sieht die Reihe aus, wenn wir sie mit q multiplizieren (wozu, werden wir noch erfahren)?

Dann wird ja bereits a_1 mit q multipliziert, aus $a_1 \cdot q$ wird $a_1 \cdot q^2$ usw. Also:

$$\boxed{q \cdot s_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n}$$

Wer sollte uns jetzt verbieten, das eine von dem anderen abzuziehen? Machen wir das mal (wir werden wieder erst zum Schluss sehen, wozu das Ganze).

$$S_n = a_1 + \boxed{a_1 \cdot q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}}$$
$$- \quad q \cdot S_n = \boxed{a_1 \cdot q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}} + a_1 q^n$$

$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_1 q^n$ | Jetzt klammern wir mal auf beiden Seiten aus

$\Rightarrow S_n(1-q) = a_1 \cdot (1-q^n)$ | $: (1-q)$

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)}}$$

Wir haben jetzt also eine Formel für S_n für geometrische Reihen erhalten.

~~Für~~ Wir können diese Formel sogar im Beispiel aus der Testklausur anwenden, wenn wir q^n in diesem Fall zu interpretieren verstehen:

$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i}$ $\Rightarrow$ a_1 wäre in diesem Fall $\left(\frac{1}{2}\right)^0$, also 1.

Unser q wäre $\left(\frac{1}{2}\right)$, n eben unendlich $\Rightarrow$ somit:

$$\boxed{S_\infty = 1 \cdot \frac{1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^\infty}_{=0}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{1-0}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}}$$

Übrigens kann man die Formel

$\boxed{S_n = a_1 \cdot \boxed{\frac{1-q^n}{1-q}}}$ auch genau anders formulieren, und zwar

bzw. $\boxed{S_n = a_1 \cdot \boxed{\frac{q^n-1}{q-1}}}$, so lange im Zähler und im Nenner getauscht wird.

Wie sieht denn das jetzt mit unendlichen geometrischen Reihen aus – sind sie konvergent oder divergent?

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Dazu wird folgende Behauptung aufgestellt:

Die Folge der n-ten Partialsummen (und damit auch s_∞) konvergiert für $|q| < 1$, divergiert jedoch für $q \geq 1$ und $q \leq 1$.

Behaupten kann das jeder – hier der Beweis:

Bereits [redacted] auf Seite 3 und 4 haben wir festgestellt, dass der Wert ins unendliche wächst, wenn $n \to \infty$ strebt, vorausgesetzt, q ist größer als 1 oder kleiner als –1.

In anderen Worten:

Es existiert kein Grenzwert, also kein Limes, für q^n.

Mathematisch ausgedrückt:

$\lim\limits_{n \to \infty} q^n$ (existiert nicht für $\cancel{q \geq 1}$ $q > 1$ oder $q \leq -1$).

Übersetzt auf unseren Fall heißt das, dass auch der Grenzwert von $a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ nicht existieren kann, also nicht

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Wenn $q = 1$ ist, dann sieht die Aufaddierung wie folgt aus:

$$s_n = a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1 = n \cdot a_1$$

Für $n \to \infty$ gibt es also wieder keinen Grenzwert.

Wenn aber q im Intervall von $(-1, 1)$ liegt, dann existiert ein Grenzwert, ~~denn~~: denn: (also: $|q| < 1$)

~~und zwar~~

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

deswegen

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(1-0)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}}$$

Das n-te Glied der geometrischen Reihe ist ja:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}\,,$$

man kann die geometrische Reihe also auch schreiben als

$$\boxed{S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}}$$

oder, wenn man den Index von 1 auf 0 verschiebt:

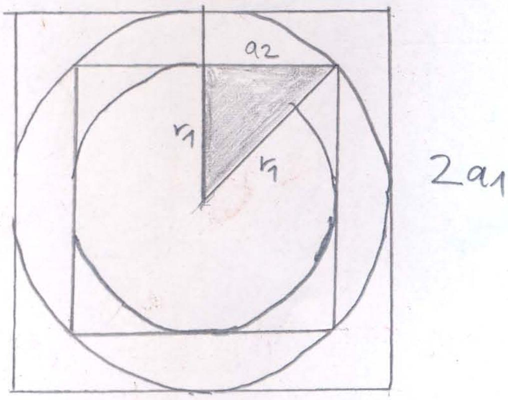
$$\boxed{S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n}$$

Wenn wir für $|q| < 1$ das gleiche Prozedere machen wie auf Seite 6 und 7, dann kommt dabei (weil q^n in diesem Fall 0 ist) folgende Formel für die Summe raus:

$$\boxed{s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}}$$

Ein Beispiel:

Einem Würfel der Seitenlänge $2a_1$ ist eine Kugel, dieser wieder ein Würfel usw. einbeschrieben. Man berechne das Gesamtvolumen aller Kugeln und das aller Würfel.



Am Bild ist abzulesen, dass
~~$a_2 = r_1$~~ $a_1 = r_1$ ist, folglich auch $a_2 = r_2$ usw.

~~Da~~ Die Hypothenuse im grau unterlegten Dreieck ist r_1.
Das kann man berechnen (Satz des Pythagoras):

$$r_1^2 = r_2^2 + \underbrace{r_2^2}_{\text{Denn } a_2 = r_2} = 2r_2^2 \Rightarrow \cancel{\text{somit ist } r_2 =}$$

$$\Rightarrow r_1^2 = 2r_2^2 \quad | :2$$

$$r_2^2 = \frac{r_1^2}{2} \quad | \sqrt{\ }$$

$$\boxed{r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{2}}}$$

Genauso geht es jetzt natürlich die ganze Zeit weiter, somit ist also $r_3 = \frac{r_2}{\sqrt{2}}$ usw....
Das gleiche gilt (logischer weise) auch für die a's, also

$a_2 = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$, $a_3 = \frac{a_2}{\sqrt{2}}$ usw....

Die allgemeine Formel für das Volumen einer Kugel ist

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

① Das heißt also für V_1 folgendes:

$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$, für $V_2 \Rightarrow$ $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot r_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{r_1^3}{(\sqrt{2})^3}$

$V_3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{r_1^3}{(\sqrt{2}^3)^2}$ usw....

Also haben wir es mit einer geometrischen Folge mit

$\boxed{q = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}}$ zu tun.

Jetzt benutzen wir also unsere allgemeine Formel für unendliche geometrische Reihen:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}}$$

$\Downarrow$ konkret

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{1-\frac{1}{(\sqrt{2})^3}} \cancel{= \frac{4}{3}\pi r_1^3}$$

$$= \frac{4}{3}\pi r_1^3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2^3}}} = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{8}}}$$ | $\Rightarrow$ erweitern mit $\sqrt{8}$

$$\cancel{= \frac{4}{3}\pi r_1^3 \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{8}}}} = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}} = \boxed{\frac{4}{3}\pi r_1^3 \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}-1}}$$

1

Das war jetzt erstmal nur das Volumen der Kugeln.
Das war jetzt erstmal nur das Volumen der Würfel...

Weiter geht's mit dem Volumen der Würfel...

$\longrightarrow$

Volumen der Würfel:

Eine Seite hat die Länge $2a_1$ (wir reden jetzt vom äußersten Würfel.)

Der Würfel hat drei Dimensionen, also:

$$V_1 = (2a_1)\cdot(2a_1)\cdot(2a_1) = (2a_1)^3 = 2^3 \cdot a_1^3 = \underline{8\,a_1^3}$$

Die Folge, die gerade bei den Kugeln galt, gilt auch hier.

Auch hier ist $q = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}$.

Deshalb ist

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} V_n = 8a_1^3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{(\sqrt{2})^3}} = 8a_1^3 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}-1}}$$