Gleichungen

Gleichungen mit <u>einer</u> Unbekannten haben die Form:

$$\sum_{l=0}^{n} a_l x^l = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

n ist der Grad der Gleichung,
$\sum_{l=0}^{n} a_l x^l$ ist das Polynom n-ten Grades.

Bei $a_n = 1$ spricht man von der "Normalform".

Folgende Form soll in Normalform gebracht werden:

$$\frac{x-1+\sqrt{x^2-6}}{3(x-2)} = 1 + \frac{x-3}{x} \qquad | \cdot x$$

$$\frac{x(x-1+\sqrt{x^2-6})}{3(x-2)} = x + x - 3 \qquad | \cdot 3(x-2)$$

$$x(x-1+\sqrt{x^2-6}) = 3x(x-2) + 3(x-2)(x-3) \qquad | \text{ Ausklammern}$$

$$x^2 - x + x\sqrt{x^2-6} = 3x^2 - 6x + 3x^2 - 9x - 6x + 18$$

$$x^2 - x + x\sqrt{x^2-6} = 6x^2 - 21x + 18 \qquad | -x^2 + x$$

$$x\sqrt{x^2-6} = 5x^2 - 20x + 18 \qquad | \; (\;)^2$$

$$x^2(x^2-6) = (5x^2 - 20x + 18)^2$$

$$x^2(x^2-6) = \underbrace{25x^4 - 200x^3 + 580x^2 - 720x + 324}_{\text{Denn (S. 18):}}$$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n$$

Ausführlicher (nach Formel von S. 18):

$$(5x^2-20x+18)^2 = 25x^4+400x^2+324-200x^3+180x^2-720x$$

$$(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)^n = a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3+\dots+2a_{n-1}a_n$$

$$\Rightarrow 25x^4-200x^3+580x^2-720x+324$$

Somit:

$$x^2(x^2-6) = 25x^4-200x^3+580x^2-720x+324 \quad | \text{Ausklammern}$$

$$x^4-6x^2 = 25x^4-200x^3+580x^2-720x+324 \quad | -x^4+6x^2$$

$$24x^4-200x^3+586x^2-720x+324=0 \quad | :24$$

$$x^4-\frac{200}{24}x^3+\frac{586}{24}x^2-\frac{720}{24}x+\frac{324}{24}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x^4-\frac{25}{3}x^3+\frac{293}{12}x^2-30x+\frac{27}{2}=0 \quad (\text{Normalform})}$$

Wichtig: Egal, was die weitere Untersuchung ergeben wird: Die x-Werte müssen in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden, um geprüft zu werden.
In der Ausgangsgleichung sehen wir, dass x nicht 2 und nicht 0 sein darf...

In diesem Kurs werden nur Formeln bis zum Polynom zweiten Grades betrachtet.
Höhere Grade müssen wir runterbrechen auf quadratische ~~Lösun~~ Gleichungen – und dann können wir die p-q-Formel anwenden...

3.1 Lineare Gleichungen

Allgemeine Formel:

$$\boxed{a_1 x + a_0 = 0, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}, \quad a_1 \neq 0}$$

$a_1 \Rightarrow$ lineares Glied

$a_0 \Rightarrow$ absolutes Glied

3.2 Quadratische Gleichungen

Formel:

$$\boxed{a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_2 \neq 0}$$

1. Umformen auf Normalform:

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad | : a_2$$

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = 0$$

Jetzt ersetzen wir $\frac{a_1}{a_2}$ durch p und $\frac{a_0}{a_2}$ durch q.

Dann haben wir:

$$\boxed{x^2 + px + q = 0} \qquad | -q$$

$$x^2 + px = -q$$

Jetzt machen wir quadratische Ergänzung, damit wir die binomische Formel anwenden können:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad \beta$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad | \sqrt{\ }$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad | -\frac{p}{2}$$

$$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Es gibt verschiedene Lösungsarten:

(a) zwei verschiedene reelle Lösungen

(b) eine (doppelte) Lösung

(c) keine reellen Lösungen

Entscheidend dafür ist, was unter der Wurzel steht; das nennen wir mal D. Also $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ (D für "Diskriminante" ⇒ lat.: entscheiden).

$D > 0$: Zwei verschiedene reelle Lösungen

$D = 0$: Eine (doppelte Lösung

$D < 0$: keine reellen Lösungen

Beispiele:

(1) $-2x^2 - 4x + 6 = 0 \quad | : (-2)$

$$x^2 + \underset{p}{2}x \underset{q}{-3} = 0$$

$D = \left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3) = 1 + 3 = 4 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow$ zwei verschiedene reelle Lösungen

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4} \Rightarrow x_1 = 1 \,;\, x_2 = -3$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-3, 1\}$

---

(2) $3x^2 + 9x + 6{,}75 = 0 \quad | : 3$

$$x^2 + 3x + 2{,}25 = 0$$

$D = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2{,}25 = 2{,}25 - 2{,}25 = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$ Eine (doppelte) Lösung

$x_{1,2} = -1{,}5 \pm 0 = -1{,}5$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-1{,}5\}$

(3)
$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

$D = \left(-\frac{4}{2}\right)^2 - 13 = 4 - 13 = -9 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$ keine reellen Lösungen

3.3 Gleichungen höheren Grades

Beispiel:

(1.)
$$-2x^3 + 5x^2 - 2x = 0 \quad | : (-2)$$
$$x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x = 0 \quad | \; x \text{ ausklammern}$$
$$\boxed{x\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) = 0}$$

Wenn $\boxed{x = 0}$ ist, dann stimmt die Gleichung. Jetzt müsste in der Klammer noch 0 rauskommen, dann haben wir weitere Nullstellen. Also:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \text{p-q-Formel}$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} = 1{,}25 \pm \sqrt{0{,}5625} = 1{,}25 \pm 0{,}75$$

$$\boxed{x_2 = 2}$$
$$\boxed{x_3 = 0{,}5}$$

(2.) Wenn eine Lösung $x_1 = k$ bekannt ist, dann dividiert man das Polynom durch $(x - k)$ und erhält ein Polynom ohne Rest und es hat einen um 1 verminderten Grad.

Beispiel →

Beispiel:

ß $3x^2-18x^2-59x+258$

Wenn $x_1=3$ bekannt ist ...

$$(3x^3-18x^2-59x+258):(x-3)=\underline{\underline{3x^2-9x-86}}$$
$$\frac{-(3x^3-9x^2)}{}$$
$$-9x^2-59x$$
$$\frac{-(-9x^2+27x)}{}$$
$$-86x+258$$
$$\frac{-(-86x+258)}{}$$
$$0$$

Aus $3x^2-9x-86$ machen wir $(\cdot\frac{1}{3})$

$$\boxed{x^2-3x-\frac{86}{3}=0}$$

$$x_{2,3}=1{,}5\pm\sqrt{(1{,}5)^2+\frac{86}{3}}=1{,}5\pm5{,}56$$

$$\underline{x_2=\cancel{30{,}916}\ 7{,}06}$$
$$\underline{\underline{x_3=-4{,}06}}$$

---

3. Die Gleichung enthält nur Exponenten, die Vielfache einer natürlichen Zahl $k\neq1$ sind. Durch Substitution $z=x^k$ reduziert man den Grad des Polynoms auf $\frac{n}{k}$.

Beispiel: $\boxed{x^4+x^2-12=0}$

Substitution: $z=x^2$ liefert $\boxed{z^2+z-12}=0$.

$$z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+12}$$
$$\boxed{z_1=3}$$
$$\boxed{z_2=-4}$$

Rücksubstitution:

$z = x^2$

$z_1 = 3$, also $\quad x^2 = 3 \quad | \sqrt{\ }$

$\qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

$z_2 = -4$, also $\quad x^2 = -4 \quad | \sqrt{\ }$

$\qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{-4}$

$\qquad \Downarrow$

$\left.\begin{array}{l} x_3 = +2i \\ x_4 = -2i \end{array}\right\}$ komplexe Zahlen

---

3.4 Das Horner-Schema

Zur Berechnung des Wertes eines Polynoms $P(x)$ ander Stelle x_0:

$$\boxed{P(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x_0^\ell}$$

benötigt man $2n-1$ Multiplikationen und n Additionen.

Beispiel für $x_0 = -3$:

$$f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 28x - 48$$

$$f(-3) = 2\cdot(-27)\cdot\boxed{(-3)} - 8\cdot(9)\cdot\boxed{(-3)} + 2\cdot(-3)\cdot\boxed{(-3)} + 28\cdot\boxed{(-3)} - 48$$

Jetzt machen wir mal eine (kompliziertere) Klammerung:

$$\boxed{f(x) = (((2x-8)x+2)x+28)x-48}$$

Allgemein:

$$\boxed{\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x^\ell = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0}$$

Das ist die Hornerdarstellung!

Nun ist es so:
Ist eine Nullstelle bekannt, so kann man dann das Hornerschema anwenden und weitere Nullstellen finden:

Wenn $x_1 = 3$

Koeffizienten

	2	-8	2	28	-48
+		6	-6	-12	48
3	2	-2	-4	16	0

resultierendes Polynom:

$$\boxed{2x^3 - 2x^2 - 4x + 16 = 0}$$

Hier muss man wieder durch Einsetzen eine Nullstelle finden und man wird fündig bei $\boxed{x_2 = -2}$.

	2	-2	-4	16
+		-4	12	-16
-2	2	-6	8	0

Koeffizienten

resultierendes Polynom:

$$2x^2 - 6x + 8 = 0 \quad | \text{ p-q-Formel}$$

$$2x^2 - 6x + 8 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$x_{3,4} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 4} \Rightarrow \text{komplexe Lösung} \ldots$$

$$x_3 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-7}}{2}$$

$$x_4 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{-7}}{2}$$

Die Funktion $f(x) = 0$ lässt sich durch die gefundenen Nullstellen auch wie folgt darstellen:

$$f(x) = \boxed{2}x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 0 \quad \text{(Normalform)}$$

$$f(x) = \boxed{2} \cdot (x-3) \cdot (x+2)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-7}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{-7}}{2}\right)$$

Bei Brüchen ~~erweitert~~ multipliziert man den Nenner aus:

$$x^3 + \frac{7}{10}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{10} = 0 \quad | \cdot 10$$

$$\boxed{10x^3 + 7x^2 - 4x - 1 = 0}$$

Nun muss man sich der Nullstelle nähern, in dem man folgende Werte ausprobiert (Vorschlag, wird ~~meistens~~ oft so gemacht): $\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{5}; \pm \frac{1}{10}\}$.

Hier wird man fündig, $\boxed{x_1 = -1}$

Horner-Schema:

$$\begin{array}{c|cccc} & 10 & 7 & -4 & -1 \\ + & & -10 & 3 & 1 \\ \hline -1 & 10 & -3 & -1 & 0 \end{array}$$

$\Downarrow$

neues Polynom

$$10x^2 - 3x - 1 = 0 \quad | : 10$$

$$x^2 - \frac{3}{10}x - \frac{1}{10} = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{3}{20} \pm \sqrt{\frac{9}{400} + \frac{40}{400}} = \frac{15}{100} \pm \sqrt{\frac{49}{400}} = \frac{15}{100} \pm \frac{7}{20}$$

$$= \frac{15}{100} \pm \frac{35}{100} \Rightarrow \underline{x_2 = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}}; \quad \underline{x_3 = -\frac{20}{100} = -\frac{1}{5}}$$

3.5 Wurzelgleichungen

Bei Wurzelgleichungen gehört die Probe zum Lösungsverfahren:

(1.)

$$2+\sqrt{7-2x}=x \quad | -2$$

$$\sqrt{7-2x}=x-2 \quad | \;()^2$$

$$7-2x=(x-2)^2$$

$$7-2x=x^2-4x+4 \quad | +2x-7$$

$$x^2-2x-3=0 \quad | \text{ p-q-Formel}$$

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+3}$$

$$=1\pm\sqrt{4}=1\pm 2$$

$$\boxed{x_1=3} \; ; \; \boxed{x_2=-1}$$

Probe für x_1: ~~$2+\sqrt{1}$~~

$$2+\sqrt{7-2x}=2+\sqrt{7-2\cdot 3}=2+\sqrt{7-6}=2+\sqrt{1}=\underline{\underline{3}} \checkmark$$

Probe für x_2:

$$2+\sqrt{7-2\cdot(-1)}=2+\sqrt{7+2}=2+\sqrt{9}=2+3=\underline{5} \;\lightning$$

5 ist $\neq -1$, also ist $x_2=-1$ keine Lösung...

(2.)

$$\sqrt{3x+5}+5=0 \quad | -5$$

$$\sqrt{3x+5}=-5$$

~~In der~~ Der Wurzelwert ist immer positiv, es kann nach Wurzelziehen keine -5 rauskommen...

(Wenn man blind drauf los rechnen würde, käme $x=\frac{20}{3}$ raus)...